

Tentamen Algoritmen en Datastructuren

woensdag 9 februari 2005, 14 - 17 uur

Het tentamencijfer T is $(p/10) + 1$, waarbij p het totaal aantal behaalde punten is. Het eindcijfer van het vak is $(3T + P)/4$, waarbij P het practicumresultaat is.

NB. Beargumenteer je antwoorden.

1. (30 punt) Een AVL-boom is een binaire zoekboom die hoogte-gebalanceerd is.
 - (a) Geef de definitie van het begrip hoogte-gebalanceerd.
 - (b) Bewijs dat voor de hoogte h van een AVL-boom met n items geldt dat $h = O(\log n)$. (Aanwijzing: stel het minimale aantal knopen van een AVL-boom met hoogte h gelijk aan $n(h)$, en laat zien dat $n(h) \geq 2^{h/2-1}$.)
 - (c) Geef een algoritme voor het toevoegen van een knoop in een AVL-boom. De resulterende boom moet uiteraard weer een AVL-boom zijn! Analyseer de tijdscomplexiteit van het algoritme.
2. (30 punt) Deze opgave gaat over ongeordende rijen (sequences) van getallen. De getallen in een rij hoeven niet verschillend te zijn. Zij n het aantal elementen van rij R .

Selectie is het vinden van het k -de kleinste element in de rij, dwz. van een element x van de rij met de eigenschap dat er minder dan k elementen in de rij kleiner zijn dan x , en hoogstens $n - k$ elementen groter dan x .

Partitie van rij R , gegeven een getal k , is het splitsen van R in drie deelrijen $K = (m \in R \mid m < k)$, $I = (m \in R \mid m = k)$ en $G = (m \in R \mid m > k)$.

 - (a) Leg uit hoe selectie vrij gemakkelijk in $O(n \log n)$ tijd kan worden uitgevoerd.
 - (b) Geef een (eenvoudig) algoritme voor partitie. De volgende $O(1)$ -methoden voor rijen zijn beschikbaar: `isEmpty()`, `first()`, `size()`, `insert(x)`, `remove(p)` (x is een getal, p is een positie). Wat is de tijdscomplexiteit van het algoritme?
 - (c) Geef het algoritme `quickSelect`, het non-deterministische algoritme voor selectie dat gebruik maakt van partitie. Gebruik de in het vorige onderdeel genoemde methoden.
 - (d) Laat zien dat de worst-case tijdscomplexiteit van `quickSelect` $O(n^2)$ is.
 - (e) Bewijs dat de verwachte tijdscomplexiteit van `quickSelect` $O(n)$ bedraagt. (Hint: onderscheid goede en slechte partities, en beargumenteer dat verwacht mag worden dat de helft van de partities goed is.)

Z.O.Z.

3. (30 punt) Deze opgave gaat over ongerichte eindige grafen G met n knopen en m kanten. Verder geldt dat G enkelvoudig is, dwz. geen parallelle kanten en geen lussen (selfloops) bevat.

- (a) Laat zien dat geldt: m is $O(n^2)$.
- (b) Wanneer is G samenhangend (connected)? Laat zien dat voor samenhangende G geldt dat n is $O(m)$. Geldt ook dat n is $\Theta(m)$?
- (c) Het ADT Graaf kent oa. de volgende fundamentele methoden voor knopen v, w en kanten e :

- adjacentVertices(v),
- incidentEdges(v),
- endVertices(e),
- areAdjacent(v, w)

Beschrijf drie datastructuren (edge list, adjacency list en adjacency matrix) die het ADT Graaf realiseren. Analyseer voor twee van de drie het geheugenbeslag, en ook de tijdscomplexiteit van de genoemde fundamentele methoden.